ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Ασκήσεις για τα μαθήματα *Φυσική I* και *Φυσική II*

Φ Υ Σ Ι Κ Η   Ι

Κινηματική, Διανύσματα θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης. Τροχιές.

Ι. 1 Δύο σωματίδια με μάζες m και $2m$, κινούνται έτσι ώστε να έχουν διανύσματα θέσης

$$\vec{\mathbf{r}}_1 = (3t+2t^2)\hat{\mathbf{x}} + (4+4t^2)\hat{\mathbf{y}} + (5+2t)\hat{\mathbf{z}} \quad \text{και} \quad \vec{\mathbf{r}}_2 = (20-t-t^2)\hat{\mathbf{x}} + (10+9t-2t^2)\hat{\mathbf{y}} + (1+4t)\hat{\mathbf{z}}$$

αντίστοιχα, όπου t = χρόνος (οι αποστάσεις σε m και ο χρόνος σε s).

(α) Αποδείξετε ότι τα σωματίδια θα συγκρουστούν και βρείτε πότε θα συμβεί αυτό.

(β) Ποια δύναμη ασκείται πάνω στο κάθε σωματίδιο; Ποια είναι η ολική εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα;

(γ) Διατηρείται η ορμή του συστήματος; Αν ναι, πόση είναι;

(δ) Αν μετά την κρούση τα σωματίδια ενώνονται σε ένα, να βρεθεί η θέση τους ως συνάρτηση του χρόνου.

Ι. 2 Το διάνυσμα θέσης ενός κινούμενου σωματιδίου είναι $\vec{\mathbf{r}} = bt\hat{\mathbf{x}} - ct^2\hat{\mathbf{y}}$, όπου t είναι ο χρόνος και b, c θετικές σταθερές. Να βρεθούν:

(α) η εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου.

(β) η ταχύτητα του σωματιδίου $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ και η επιτάχυνσή του $\vec{\gamma}$, καθώς και τα μέτρα τους.

(γ) η γωνία μεταξύ των $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ και $\vec{\gamma}$, ως συνάρτηση του χρόνου.

(δ) η ολική απόσταση που διανύει το σωματίδιο στο χρονικό διάστημα μεταξύ $t=0$ και $t=\tau=b/2c$.
$$\left(\int_0^1 \sqrt{1+z^2}\,\mathrm{d}z = \sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$$

Ι. 3 Σώμα μάζας m κινείται σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή από τις συντεταγμένες του σώματος: $x = 3a\sin\omega t$, $y = 4a\sin\omega t$, $z = 5a\cos\omega t$ όπου t = χρόνος, και ω και a είναι θετικές σταθερές.

(α) Να βρεθούν τα διανύσματα θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης ως συναρτήσεις του χρόνου t.

(β) Αποδείξετε ότι η τροχιά είναι επίπεδη. (Υπόδειξη: δείξετε ότι τα διανύσματα θέσης σε τρεις διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1, t_2, t_3 είναι συνεπίπεδα).

Ι. 4 Σημειακή μάζα m κινείται πάνω σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή ως

$$x = \alpha\cos(\omega t), \quad y = \alpha\sin(\omega t), \quad z = bt^2,$$

όπου t είναι ο χρόνος, και α, b και ω είναι θετικές σταθερές.

(α) Να βρεθεί το διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}}$, η ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ και η επιτάχυνση $\vec{\gamma}$ της μάζας συναρτήσει του χρόνου.

(β) Αν Κ είναι ένα σημείο πάνω στον άξονα των z που έχει διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{c}} = z\hat{\mathbf{z}} = bt^2\hat{\mathbf{z}}$, και $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{c}}$ είναι το διάνυσμα από το σημείο Κ στη μάζα, να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\mathbf{R}}$ και να δείξετε ότι η απόσταση της μάζας από το σημείο Κ ή τον άξονα των z είναι σταθερή.

(γ) Βρείτε τη δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ που ασκείται πάνω στη μάζα. Δείξετε ότι αποτελείται από δύο συνιστώσες: μία κεντρομόλο δύναμη με σταθερό μέτρο προς το σημείο Κ, και μία σταθερή στην κατεύθυνση z.

(δ) Υπολογίστε τον στιγμιαίο ρυθμό παραγωγής έργου από τη δύναμη, $\vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$, και δείξετε ότι εξαρτάται μόνο από την κίνηση στην κατεύθυνση z.

Εξίσωση κίνησης. Δυνάμεις.

Ι. 5 Ένα σωματίδιο με μάζα m κινείται στο επίπεδο xy υπό την επίδραση δύναμης $\vec{\mathbf{F}} = -C\vec{\mathbf{r}}$, όπου C μια θετική σταθερά και $\vec{\mathbf{r}}$ το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου. Ζητούνται:

(α) να γραφούν και να λυθούν οι εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου ως προς τους άξονες x και y.

(β) ποια είναι η συνθήκη ώστε η τροχιά του σωματιδίου να είναι περιφέρεια κύκλου και ποια είναι τότε η περίοδος της κίνησης;

(γ) ποια είναι η συνθήκη ώστε η τροχιά του σωματιδίου να είναι ευθεία με κλίση 45^o ως προς τον άξονα x;

Ι. 6 Ένα σώμα έχει μάζα m, βρίσκεται αρχικά ακίνητο στη θέση $y = 0$ και αρχίζει να πέφτει κατακόρυφα (κατά μήκος του άξονα y, η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα πάνω). Η δύναμη της τριβής του αέρα είναι ίση με $-b\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$, όπου $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ η ταχύτητα του σώματος και b μια θετική σταθερά.

(α) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος, υ, ως συνάρτηση του χρόνου.

(β) Δείξετε ότι το σώμα τείνει να αποκτήσει μια ορική ταχύτητα και βρείτε την τιμή της.

(γ) Να βρεθεί η θέση του σώματος, y, ως συνάρτηση του χρόνου.

(δ) Αναπτύξετε τις απαντήσεις για τα $y(t)$ και $\upsilon(t)$ σε σειρές δυνάμεων του χρόνου, για να βρείτε σχέσεις που ισχύουν για μικρές τιμές του t.

Ι. 7 Σωματίδιο μάζας m κινείται στο επίπεδο xy. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στο σημείο (0, 0) και έχει ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_0$ η οποία σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα x. Το επίπεδο xy είναι οριζόντια λεία επιφάνεια. Η μόνη δύναμη που δρα στο σωματίδιο είναι μία δύναμη τριβής, $-mk\upsilon_y\hat{\mathbf{y}}$, ανάλογη της συνιστώσας υ_y της ταχύτητάς του, όπου k είναι ένας σταθερός θετικός συντελεστής.

(α) Ποια είναι η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου;

(β) Βρείτε την ταχύτητά του ως συνάρτηση του χρόνου. Μετά πόσο χρόνο η κατακόρυφη συνιστώσα της γίνεται $\upsilon_0/2$;

(γ) Ποια είναι η εξίσωση της τροχιάς που διαγράφει το σωματίδιο στο επίπεδο xy;

(δ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή y_m του y στην τροχιά;

Ι. 8 Σφαίρα μάζας m εκτοξεύεται από το σημείο (0, 0) με αρχική ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_0$ που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x. Το σημείο βολής βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος. Κατά την κίνησή της η σφαίρα υφίσταται αντίδραση $-b\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ από την ατμόσφαιρα, όπου $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ είναι η ταχύτητα της σφαίρας και b μια θετική σταθερά.

(α) Βρείτε τις συναρτήσεις $\upsilon_x(t)$ και $\upsilon_y(t)$ κατά την κίνηση της σφαίρας.

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες $x(t)$ και $y(t)$ της σφαίρας.

(γ) Γράψετε την εξίσωση που προσδιορίζει την τιμή του χρόνου τ όταν η σφαίρα προσκρούει στο έδαφος, χωρίς να επιχειρήσετε να τη λύσετε.

(δ) Δείξετε ότι για $\tau >> m/b$ ο χρόνος αυτός είναι $\tau \approx \dfrac{hb}{mg} + \dfrac{\upsilon_0}{g}\sin\theta$.

Ι. 9 Μια βάρκα κινείται με ταχύτητα $\vec{\mathbf{\upsilon}}_0 = \upsilon_0 \hat{\mathbf{x}}$ ($\upsilon_0 > 0$) και βρίσκεται στη θέση $x = 0$ όταν τη χρονική στιγμή $t = 0$ σβήνεται η μηχανή της. Η αντίσταση του νερού είναι τέτοια ώστε η δύναμη τριβής που ασκείται πάνω στη βάρκα να είναι ίση με $-be^{\alpha\upsilon}$, όπου υ είναι το μέτρο της ταχύτητας της βάρκας και α και b είναι θετικές σταθερές.

(α) Να βρεθεί η ταχύτητα της βάρκας, υ, ως συνάρτηση του χρόνου για $t > 0$.

(β) Να βρεθεί η θέση της βάρκας, x, ως συνάρτηση του χρόνου για $t > 0$.

(γ) Πόσος χρόνος, τ, θα απαιτηθεί για να σταματήσει η βάρκα; Σε ποια τιμή τείνει ο τ για πολύ μεγάλες τιμές της υ_0; $\left(\int \ln(1+ct)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{c}(1+ct)[\ln(1+ct)-1]\right)$

Ι. 10 Σώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $V\hat{\mathbf{y}}$ $(V > 0)$ κατά μήκος του άξονα των y, η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα πάνω. Η αρχική θέση του σώματος είναι $y = 0$. Πάνω στο σώμα δρα, εκτός του βάρους του, δύναμη τριβής από τον αέρα ίση με $-mk\vec{\mathbf{\upsilon}}$, όπου $\vec{\mathbf{\upsilon}}$ η ταχύτητα του σώματος και k μια θετική σταθερά.

(α) Να διατυπωθεί η εξίσωση κίνησης της μάζας.

(β) Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \upsilon\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}y}$ δείξετε ότι τα υ και y ικανοποιούν τη σχέση $y = \dfrac{V-\upsilon}{k} - \dfrac{g}{k^2}\left[\ln\left(1+\dfrac{kV}{g}\right) - \ln\left(1+\dfrac{k\upsilon}{g}\right)\right]$.

(γ) Βρείτε το μέγιστο ύψος H στο οποίο θα φθάσει το σώμα.

(δ) Αν $\upsilon = -U$ είναι η ταχύτητα με την οποία το σώμα επιστρέφει στο $y = 0$, δείξετε ότι: $g - kU = (g + kV)\exp\left(-\dfrac{k}{g}(V+U)\right)$.

Ι. 11 Ένα σώμα μάζας m βρίσκεται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο. Η γωνία θ που σχηματίζει το επίπεδο με την οριζόντια κατεύθυνση είναι αρχικά μηδενική και αυξάνεται πολύ αργά μέχρι τη στιγμή που το σώμα αρχίζει να κινείται. Τότε η γωνία διατηρείται σταθερή. Αν οι συντελεστές στατικής και κινητικής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι μ_s και μ_k αντίστοιχα ($\mu_s > \mu_k$), να βρεθούν ως συναρτήσεις του χρόνου:

(α) η ταχύτητα της μάζας, και (β) η θέση της.

Δυναμική ενέργεια.

Ι. 12 Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος είναι $U(\vec{\mathbf{r}})$, όπως δίνεται παρακάτω:

(α) $U = \alpha x y^2 z^3$ (β) $U = \alpha\dfrac{x^2 y^3}{z^5} - \alpha$ (γ) $U = \dfrac{1}{2}kr^2$ (δ) $U = -\dfrac{\kappa}{r}$

όπου $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, και α, k και κ είναι θετικές σταθερές.

Σε κάθε περίπτωση, βρείτε τη δύναμη $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$ που ασκείται πάνω στο σώμα.

Ι. 13 Ένα σώμα κινείται πάνω στον άξονα x και υφίσταται δύναμη ίση με $F(x) = -kx + \dfrac{a}{x^3}$, όπου k και a είναι θετικές σταθερές. Βρείτε τη δυναμική ενέργεια του σώματος, $U(x)$.

Ι. 14 Υπολογίστε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{\mathbf{F}} = (3x-2y)\hat{\mathbf{x}} + (y+2z)\hat{\mathbf{y}} - x^2\hat{\mathbf{z}}$ όταν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της από το σημείο $(0,0,0)$ στο σημείο $(1,1,1)$ κατά μήκος της καμπύλης C, όταν C είναι:

(α) η καμπύλη $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$, και (β) η καμπύλη $x = z^2,\ z = y^2$.

(γ) Είναι διατηρητική η δύναμη;

Ι. 15 Η δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα σώμα είναι $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z)$ (σε newton, όταν οι αποστάσεις είναι σε m) όπως δίνεται παρακάτω. Σε καθεμιά από τις περιπτώσεις, δείξετε ότι η δύναμη είναι διατηρητική και βρείτε τη δυναμική ενέργεια $U(x,y,z)$ του σώματος. Θεωρήστε ότι $U(0,0,0) = 0$.

(α) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (y^2 + 2xz)\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\hat{\mathbf{y}} + (2yz + x^2)\hat{\mathbf{z}}$ (Απ.: $U(x,y,z) = -(xy^2 + yz^2 + zx^2)$)

(β) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = y^2z^3\hat{\mathbf{x}} + 2xyz^3\hat{\mathbf{y}} + 3xy^2z^2\hat{\mathbf{z}}$ (γ) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (y+z)\hat{\mathbf{x}} + (x+z)\hat{\mathbf{y}} + (x+y)\hat{\mathbf{z}}$

(δ) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (2xyz)\hat{\mathbf{x}} + (x^2z + z + 2y)\hat{\mathbf{y}} + (y + x^2y)\hat{\mathbf{z}}$ (ε) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = -k_x x\hat{\mathbf{x}} - k_y y\hat{\mathbf{y}} - k_z z\hat{\mathbf{z}}$

Ι. 16 Η δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα σώμα είναι $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$ όπως δίνεται παρακάτω, όπου κ και a είναι θετικές σταθερές, r είναι η απόσταση από την αρχή των αξόνων Ο και $\hat{\mathbf{r}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα από το σημείο Ο προς το σημείο $\vec{\mathbf{r}}$. Σε καθεμιά από τις περιπτώσεις, βρείτε τη δυναμική ενέργεια του σώματος, $U(\vec{\mathbf{r}})$. Θεωρήστε ότι $U = 0$ όταν $r = r_A$, όπως δίνεται σε κάθε περίπτωση.

(α) $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = -\dfrac{2\kappa}{r^3}\hat{\mathbf{r}}$, $r_A = \infty$ (Απ.: $U(\vec{\mathbf{r}}) = -\dfrac{\kappa}{r^2}$). (β) $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = \kappa\left(\dfrac{a}{r} - \dfrac{a^2}{r^2}\right)\hat{\mathbf{r}}$, $r_A = a$.

(γ) $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = \kappa\left(\dfrac{r}{a} + \dfrac{a}{r}\right)\hat{\mathbf{r}}$, $r_A = a$. (δ) $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = \kappa\left(\dfrac{3r^2}{a^2} + \dfrac{2r}{a}\right)\hat{\mathbf{r}}$, $r_A = 0$.

(ε) $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = \kappa\sin\left(\dfrac{r}{a}\right)\hat{\mathbf{r}}$, $r_A = 0$. (Απ.: $U(\vec{\mathbf{r}}) = \kappa a\cos\left(\dfrac{r}{a}\right) - \kappa a$).

(στ) $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = 2\kappa\sin^2\left(\dfrac{r}{a}\right)\hat{\mathbf{r}}$, $r_A = 0$ (ζ) $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = \dfrac{\kappa}{a} r e^{-r^2/a^2}\,\hat{\mathbf{r}}$, $r_A = 0$.

Διαγράμματα δυναμικής ενέργειας.

Ι. 17 Σώμα μάζας m έχει δυναμική ενέργεια $U(r) = A\left(-\dfrac{3r_0^2}{r^2} + \dfrac{2r_0^3}{r^3}\right)$, όπου A και r_0 είναι θετικές σταθερές και r η απόσταση του σώματος από ακίνητο σημείο Ο. (Σημείωση: το r είναι πάντοτε θετικό).

(α) Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στο σώμα.

(β) Σε ποια απόσταση μπορεί να ισορροπήσει το σώμα;

(γ) Αν το σώμα αφεθεί ελεύθερο με αρχική ταχύτητα ίση με μηδέν σε άπειρη απόσταση από το Ο, να βρεθεί η ταχύτητά του στη θέση $r = r_0$ και η απόσταση στην οποία η ταχύτητά του θα ξαναγίνει μηδενική.

Ι. 18 Ένα σώμα με μάζα $m = 0{,}5$ kg κινείται κατά τον άξονα x. Η δυναμική του ενέργεια είναι $U(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3$, $(-\infty < x < \infty)$ σε J, όταν το x είναι σε m.

(α) Σχεδιάστε τη συνάρτηση $U(x)$ και βρείτε τα σημεία ισορροπίας του σώματος.

(β) Υπολογίστε και σχεδιάστε τη δύναμη $F(x)$ που ασκείται πάνω στο σώμα.

(γ) Το σώμα ξεκινά από τη θέση $x = 2$ m με αρχική ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}} = -2\hat{\mathbf{x}}$ m/s. Περιγράψετε ποιοτικά την κίνησή του. Βρείτε την ταχύτητά του στα σημεία ισορροπίας.

Ι. 19 Σώμα μάζας m κινείται στο επίπεδο xy με τέτοιο τρόπο ώστε το διάνυσμα θέσης του να είναι $\vec{\mathbf{r}}(t) = (\alpha\cos\omega t)\hat{\mathbf{x}} + (\beta\sin\omega t)\hat{\mathbf{y}}$, όπου α, β και ω είναι θετικές σταθερές και t ο χρόνος.

(α) Δείξετε ότι το σώμα κινείται σε ελλειπτική τροχιά. Βρείτε τα χαρακτηριστικά της έλλειψης αυτής.

(β) Βρείτε τη δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ που ασκείται στο σώμα. Δείξετε ότι η δύναμη είναι διατηρητική.

(γ) Βρείτε τη δυναμική και την κινητική ενέργεια του σώματος. Θεωρήστε ότι $U(r = 0) = 0$.

(δ) Ποια είναι η ολική ενέργεια του σώματος; Δείξετε ότι αυτή διατηρείται σταθερή.

(ε) Βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ καθώς το σώμα κινείται από τη θέση Α (α, 0), στη θέση Β (0, β).

(στ) Υπολογίστε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ και ως συνάρτηση του χρόνου. Επαληθεύσετε το αποτέλεσμα (ε).

Ι. 20 Η δυναμική ενέργεια ενός διατομικού μορίου είναι ίση με $U(r) = D\left(-\frac{b}{r} + \frac{b^2}{r^2}\right)$, όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των δύο ατόμων, και D και b είναι θετικές σταθερές. Το ένα άτομο είναι ακίνητο στη θέση r=0.

(α) Σχεδιάστε τη συνάρτηση $U(r)$.

(β) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο ελεύθερο άτομο. Εξηγήστε πού είναι η δύναμη ελκτική, μηδενική, απωστική.

(γ) Το ελεύθερο άτομο κρατείται στη θέση $r = 3b/2$ και αφήνεται να κινηθεί, με μηδενική αρχική ταχύτητα. Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει. Περιγράψετε την κίνηση που θα επακολουθήσει.

(δ) Αν η αρχική απόσταση μεταξύ των δύο ατόμων είναι x, για ποιες τιμές του x θα διασπαστεί το μόριο;

Ι. 21 Ένα σωματίδιο, μάζας 1 kg, κινείται σε πεδίο δύναμης, τέτοιο ώστε η δυναμική του ενέργεια να είναι $U(r) = 18r^2e^{-2r}$ (σε J όταν το r δίνεται σε m).

(α) Βρείτε τα σημεία ευσταθούς ισορροπίας του σωματιδίου.

(β) Αν το σωματίδιο αφεθεί ελεύθερο στο σημείο $r = 1/4$ m με μηδενική ταχύτητα, βρείτε την ταχύτητα με την οποία θα φθάσει στο σημείο ισορροπίας.

(γ) Βρείτε την περίοδο για μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας.

Ι. 22 Σημειακή μάζα m κινείται στο επίπεδο xy. Η δυναμική της ενέργεια είναι

$$U(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2, \quad \text{όπου α και β είναι θετικές σταθερές.}$$

(α) Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται πάνω στη μάζα m.

(β) Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιείται από τα α και β για να είναι η δύναμη κεντρική;

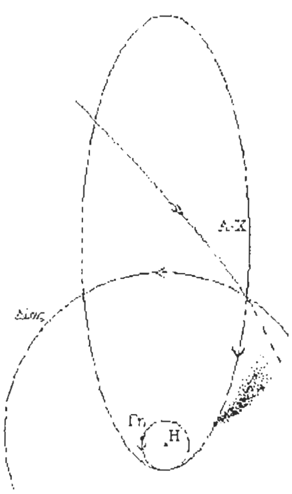
(γ) Αν το σώμα κρατηθεί ακίνητο στη θέση $y=0,\ x=x_0$ και αφεθεί ελεύθερο στο χρόνο $t=0$, να βρεθεί η θέση $\vec{r}(t)$ του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου, η ταχύτητά του $\vec{\upsilon}(t)$, η κινητική του ενέργεια K και η ολική του ενέργεια E.

Ι. 23 Σωματίδιο μάζας m κινείται κατά τον άξονα x, με δυναμική ενέργεια $U(x)$. Αν το σωματίδιο βρίσκεται στις θέσεις x_1 και x_2 τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 αντίστοιχα (με $x_2 > x_1$), δείξετε ότι: $t_2 - t_1 = \sqrt{\dfrac{m}{2}}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-U(x)}}$, όπου E είναι η ολική ενέργεια του σωματιδίου.

Χρησιμοποιήστε την παραπάνω σχέση για σώμα (αρμονικό ταλαντωτή) που έχει δυναμική ενέργεια $U(x)=\dfrac{1}{2}\kappa x^2$ και ξεκινά από ηρεμία από το σημείο $x=\alpha$, για να δείξετε ότι $x=\alpha\cos\left(\sqrt{\kappa/m}\,t\right)$.

Στροφορμή.

Ι. 24 Ένας κομήτης είχε αρχικά μια τροχιά της οποίας το περιήλιο απείχε από τον Ήλιο περισσότερες από 3 u.a. (1 u.a. =1 AU =1 αστρονομική μονάδα = 1,5 10^8 km, η μέση απόσταση Γης-Ηλίου). Οι κομήτες που δεν πλησιάζουν σε μικρότερη απόσταση από περίπου 3 u.a. από τον Ήλιο, δεν αποκτούν "κόμη" και δεν παρατηρούνται. Σε μια από τις περιφορές του, ο κομήτης πέρασε κοντά από τον πλανήτη Δία, με αποτέλεσμα να μεταβληθεί η κατεύθυνση κίνησής του και η στροφορμή του ως προς το κέντρο του Ηλίου. Μετά από αυτό, η νέα τροχιά του κομήτη τον φέρνει σε αρκετά μικρές αποστάσεις από τον Ήλιο, ώστε να αποκτά ουρά και να γίνεται ορατός. Η διεργασία αυτή είναι γνωστή ως *άγρα κομητών* (άγρα = κυνήγι, ψάρεμα), στην οποία επιδίδονται οι μεγάλοι πλανήτες και κυρίως ο Δίας.



Αμέσως μετά τη συνάντησή του αυτή με τον Δία, ο κομήτης είχε ταχύτητα $\upsilon=\sqrt{15}$ u.a./y (y = έτος). Ως προς τον Ήλιο, και στην απόσταση των 5 u.a. από αυτόν, ο κομήτης είχε ακτινική συνιστώσα της ταχύτητάς του $\upsilon_r = \dfrac{2}{5}\sqrt{74}$ u.a./y, εγκάρσια συνιστώσα $\upsilon_\theta = \dfrac{1}{5}\sqrt{79}$ u.a./y, και κινείται στο επίπεδο της τροχιάς της Γης.

Χρησιμοποιώντας μονάδες u.a. για το μήκος και y για το χρόνο, στις οποίες είναι $GM = 40\ \text{u.a.}^2/\text{y}^2$, και τη μάζα του κομήτη m όπου αυτή χρειάζεται,

(α) Βρείτε τη στροφορμή L του κομήτη ως προς τον Ήλιο, και την ολική του ενέργεια E.

(β) Βρείτε την ελάχιστη, r_1, και τη μέγιστη απόσταση, r_2, του κομήτη από τον Ήλιο.

(γ) Βρείτε τα χαρακτηριστικά μεγέθη της ελλειπτικής τροχιάς του κομήτη:

i τον μεγάλο ημιάξονά της $\alpha=\dfrac{r_1+r_2}{2}$. ii την εκκεντρότητά της $\varepsilon=\dfrac{r_2-r_1}{r_2+r_1}$.

iii τον μικρό ημιάξονά της $b=\alpha\sqrt{1-\varepsilon^2}=\sqrt{r_1 r_2}$.

(δ) Το εμβαδόν της έλλειψης είναι $S=\pi ab$. Από το γεγονός ότι ο ρυθμός σάρωσης επιφάνειας από την επιβατική ακτίνα που συνδέει τον κομήτη με τον Ήλιο είναι σταθερός και ίσος με $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\dfrac{L}{2m}$, βρείτε την περίοδο περιφοράς T του κομήτη γύρω από τον Ήλιο.

Ι. 25 Ένας δορυφόρος έχει μάζα m και κινείται με ταχύτητα υ_0 σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_0 γύρω από τη Γη. Η Γη θεωρείται τελείως σφαιρική και έχει μάζα M. Ένα σώμα μάζας m, κινούμενο ακτινικά με ταχύτητα υ_0, συγκρούεται με τον δορυφόρο και ενσωματώνεται σε αυτόν δημιουργώντας ένα σώμα μάζας $2m$.

(α) Εξηγήστε γιατί η στροφορμή L των δύο σωμάτων ως προς το κέντρο της Γης παραμένει σταθερή και βρείτε την τιμή της.

(β) Βρείτε την ολική ενέργεια $E_{ολ}$ που θα έχει το σώμα που σχηματίζεται μετά τη σύγκρουση.

(γ) Αν η $E_{ολ}$ είναι αρνητική, το σώμα θα κινηθεί σε κλειστή τροχιά, που είναι κύκλος ή έλλειψη. Δείξετε ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση η τροχιά του σώματος θα είναι ελλειπτική.

(δ) Χρησιμοποιώντας την αρχή της διατήρησης της στροφορμής, βρείτε την ελάχιστη, r_1, και τη μέγιστη απόσταση, r_2, του σώματος από τη Γη, καθώς αυτό κινείται στην ελλειπτική του τροχιά. Εκφράστε τα αποτελέσματα συναρτήσει του r_0.

Ι. 26 Αβαρής ράβδος μήκους l έχει τα δύο της άκρα στα σημεία $(0, 0)$ και $(l, 0)$. Στο άκρο της στο σημείο $(0, 0)$ υπάρχει σημειακή μάζα m στερεωμένη στη ράβδο. Μια άλλη μάζα $2m$ κινείται ελεύθερη στην κατεύθυνση $+y$ με ταχύτητα V. Τη χρονική στιγμή $t=0$ φθάνει στο σημείο $(l, 0)$ και προσκολλάται στο ελεύθερο άκρο της ράβδου. Οι δύο μάζες και η ράβδος κινούνται μετά ως ενιαίο σύνολο, στο επίπεδο xy, το οποίο είναι οριζόντια και λεία επιφάνεια. Στο σύστημα δεν ασκείται καμιά εξωτερική δύναμη.

(α) Βρείτε τη θέση του κέντρου μάζας του συστήματος τη χρονική στιγμή $t=0$, την ολική ορμή του συστήματος, καθώς και την ταχύτητα $\dot{\vec{\mathbf{R}}}_{CM}$ και τη θέση $\vec{\mathbf{R}}_{CM}$ του κέντρου μάζας του ως προς το σημείο $(0, 0)$, για $t>0$.

(β) Βρείτε τη στροφορμή του συστήματος ως προς την αρχή των αξόνων, $\vec{\mathbf{L}}_0$, και ως προς το κέντρο μάζας του, $\vec{\mathbf{L}}_{CM}$. Εξηγήστε γιατί οι τιμές αυτές παραμένουν σταθερές.

(γ) Από τη στροφορμή του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας του, $\vec{\mathbf{L}}_{CM}$, και εξετάζοντας το σύστημα όπως το βλέπει ένας παρατηρητής που βρίσκεται στο κέντρο μάζας του και κινείται με αυτό, υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου γύρω από το κέντρο μάζας του συστήματος.

(δ) Περιγράψετε την κίνηση που εκτελεί το σύστημα μαζών και ράβδου. Επαληθεύσετε ότι ισχύει η σχέση $\vec{\mathbf{L}}_0 = \vec{\mathbf{L}}_{CM} + M_{ολ}\vec{\mathbf{R}}_{CM} \times \dot{\vec{\mathbf{R}}}_{CM}$, όπου $M_{ολ} = 3m$.

Ι. 27 Δύο πίθηκοι A και B είναι κρεμασμένοι από τα δύο άκρα ενός σχοινιού, που περνάει από μία τροχαλία ακτίνας R. Οι πίθηκοι βρίσκονται σε ίση απόσταση L από την τροχαλία. Οι μάζες του σχοινιού και της τροχαλίας είναι αμελητέες. Οι πίθηκοι έχουν την ίδια μάζα, είναι αρχικά ακίνητοι και αρχίζουν ταυτόχρονα να αναρριχώνται με ταχύτητες υ και 3υ, αντίστοιχα, ως προς το σκοινί. Εξετάζοντας την ολική στροφορμή των δύο πιθήκων ως προς το κέντρο της τροχαλίας, βρείτε τις ταχύτητές τους ως προς αυτήν. Υπολογίστε το χρόνο που χρειάζεται ο καθένας για να φτάσει στην τροχαλία.

Συστήματα μεταβλητής μάζας.

Ι. 28 Αλυσίδα βρίσκεται σωριασμένη στο έδαφος. Η αλυσίδα έχει γραμμική πυκνότητα μάζας ίση με λ kg/m. Δύναμη $\vec{\mathbf{F}} = F\hat{\mathbf{y}}$ δρα στο ένα άκρο της αλυσίδας, ανυψώνοντάς την κατακόρυφα. Να βρεθεί η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ που απαιτείται για να ανυψώσει την αλυσίδα με σταθερή ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{\upsilon}} = \upsilon\hat{\mathbf{y}}$. Υπολογίστε, συναρτήσει του ύψους y του άνω άκρου της αλυσίδας, το έργο $W(y)$ που έχει παραχθεί από τη δύναμη, την κινητική ενέργεια E_K και τη δυναμική ενέργεια E_Δ της αλυσίδας, καθώς και την απώλεια ενέργειας ως κλάσμα της E_K.

Ι. 29 Αμάξι μάζας M_0 κινείται σε ευθύγραμμη τροχιά με ταχύτητα υ_0 και αμελητέες τριβές. Η μάζα του αρχίζει να αυξάνει τη χρονική στιγμή $t = 0$ γραμμικά με το χρόνο με ρυθμό $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = a > 0$, π.χ. λόγω βροχής που πέφτει κατακόρυφα και ομοιόμορφα.

(α) Να βρεθεί η ταχύτητα του αμαξιού για $t > 0$.

(β) Αν στο αμάξι ασκείται για $t > 0$ εξωτερική δύναμη, τέτοια ώστε η ταχύτητά του να παραμένει σταθερή και ίση με υ, να βρεθεί η απαιτούμενη ισχύς. Ποιο ποσοστό της ισχύος μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια;

Ι. 30 Διαστημόπλοιο κινείται πάνω σε ευθεία, αποβάλλοντας αέρια με σταθερό ρυθμό α. Έτσι, αν $M(t)$ είναι η μάζα του διαστημοπλοίου, τότε $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\alpha$ (μάζα ανά μονάδα χρόνου). Τα αέρια αποβάλλονται προς τα πίσω με ταχύτητα V ως προς το διαστημόπλοιο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η μάζα του διαστημοπλοίου είναι M_0 και η ταχύτητά του $\vec{\mathbf{\upsilon}}_0$. Η μόνη εξωτερική δύναμη που ασκείται πάνω στο διαστημόπλοιο είναι μια δύναμη τριβής ίση με $\vec{\mathbf{F}}_{\tau\rho} = -k\vec{\mathbf{\upsilon}}$, όπου $\vec{\mathbf{\upsilon}}$ η ταχύτητα του διαστημοπλοίου και k μια θετική σταθερά.

(α) Βρείτε την ταχύτητα $\upsilon(t)$ του διαστημοπλοίου ως συνάρτηση του χρόνου t.

(β) Βρείτε την απόσταση $s(t)$ που έχει διανύσει το διαστημόπλοιο ως συνάρτηση του t.

(γ) Βρείτε τα $\upsilon(t)$ και $s(t)$ για την ειδική περίπτωση που είναι $k = \alpha$. Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα στην περίπτωση αυτή;

Ι. 31 Ένα σώμα εκτοξεύεται από το σημείο $(0, 0)$ με οριζόντια συνιστώσα ταχύτητας ίση με u και κατακόρυφη ίση με w. Η μάζα του σώματος αυξάνει λόγω της προσρόφησης, από ένα νέφος, υδρατμών οι οποίοι είναι ακίνητοι στην ατμόσφαιρα, με ρυθμό m_0/τ μονάδες μάζας ανά μονάδα χρόνου, όπου m_0 είναι η αρχική τιμή της μάζας και τ μια θετική σταθερά. Η μόνη εξωτερική δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα είναι το βάρος του.

(α) Δείξετε ότι, όταν η μάζα του σώματος έχει την τιμή $m(t)$, η θέση του είναι:

$$x = u\tau \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) y = \frac{1}{4} g\tau^2\left(1 - \frac{m^2}{m_0^2}\right) + \left(w\tau + \frac{1}{2} g\tau^2\right)\ln\left(\frac{m}{m_0}\right).$$

(β) Δείξετε επίσης πως, αν $\upsilon > 0$, το μέγιστο ύψος στο οποίο φθάνει το σώμα είναι:

$$y_m = \frac{1}{2}\left(w\tau + \frac{1}{2} g\tau^2\right)\ln\left(1 + \frac{2w}{g\tau}\right) - \frac{1}{2} w\tau .$$

(γ) Ποια είναι η εξίσωση της τροχιάς που ακολουθεί το σώμα;

Ι. 32 Μια σφαιρική σταγόνα από χαλάζι πέφτει κατακορύφως λόγω της βαρύτητας, χωρίς αντίσταση από τον αέρα. Λόγω στερεοποίησης υδρατμών στην επιφάνεια της σφαίρας, η ακτίνα της r αυξάνει με ρυθμό $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = \lambda r$, όπου λ είναι μια θετική σταθερά. Η αρχική ακτίνα της σταγόνας είναι α και η αρχική της μάζα m_0.

(α) Βρείτε τη μάζα της σταγόνας συναρτήσει του χρόνου t.

(β) Βρείτε την ταχύτητα της σταγόνας συναρτήσει του t.

(γ) Δείξετε ότι η ταχύτητα της σφαίρας τείνει προς μια ορική τιμή ίση με $g/3\lambda$.

Ι. 33 Νήμα είναι περασμένο πάνω από τροχαλία, με τα δύο του άκρα κατακόρυφα. Στο ένα άκρο του νήματος είναι δεμένη μάζα $m = 0,5$ kg και στο άλλο άκρο άδειο δοχείο μάζας 0,3 kg. Το δοχείο μαζεύει βροχή με ρυθμό 0,05 kg/s. Η ταχύτητα των σταγόνων της βροχής, η οποία πέφτει κατακόρυφα, είναι 1 m/s. Πόση μάζα νερού πρέπει να μαζευτεί στο δοχείο ώστε αυτό να αρχίσει να κινείται προς τα κάτω; (Η τροχαλία θεωρείται χωρίς τριβές).

Ροπή αδράνειας.

Ι. 34 Μια λεπτή πλάκα έχει σχήμα ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ, με πλευρές ίσες με 2α. Η επιφανειακή πυκνότητα του υλικού της πλάκας είναι ίση με $\sigma = \kappa x$, όπου κ είναι μια σταθερά και x η απόσταση από τη βάση του τριγώνου, ΒΓ. Δείξετε ότι:

(α) η μάζα του τριγώνου είναι $M = \kappa \alpha^3$,

(β) η ροπή αδράνειας του τριγώνου ως προς άξονα την πλευρά ΒΓ είναι ίση με $I = \frac{9}{10} M\alpha^2$, και

(γ) η ροπή αδράνειας του τριγώνου ως προς άξονα την πλευρά ΑΒ είναι ίση με $I = \frac{3}{10} M\alpha^2$.

Ι. 35 Η μάζα ενός γαλαξία μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι κατανεμημένη σε ένα επίπεδο, με τέτοιο τρόπο ώστε η επιφανειακή πυκνότητα μάζας να είναι $\sigma = \kappa \mathrm{e}^{-r^2/\alpha^2}$, όπου κ και α είναι θετικές σταθερές και r η απόσταση από το κέντρο του γαλαξία. Δείξετε ότι:

(α) η μάζα του γαλαξία είναι $M = \pi \kappa \alpha^2$, και

(β) η ροπή αδράνειας του γαλαξία ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του και που περνά από το κέντρο του είναι ίση με $I_z = M\alpha^2$. (Δίνεται: $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1$).

Ι. 36 Λεπτή πλάκα βρίσκεται στο επίπεδο xy και έχει ελλειπτικό σχήμα, με όρια που δίνονται από την εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, όπου α και b είναι θετικές σταθερές. Η επιφανειακή πυκνότητα μάζας της πλάκας είναι σταθερή και ίση με σ. Βρείτε τις ροπές αδράνειας της πλάκας ως προς τους άξονες x, y και z.

Το εμβαδόν της έλλειψης είναι $S = \pi a b$.

Δίνονται: $\int_0^1 u\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{16}$, και $\int_0^1 (1-u^2)^{3/2}\mathrm{d}u = \frac{3\pi}{16}$).

Απ.: $I_x = \frac{1}{4} Mb^2$, $I_y = \frac{1}{4} M\alpha^2$, $I_z = \frac{1}{4} M(\alpha^2 + b^2)$.

Περιστρεφόμενο στερεό σώμα.

Ι. 37 Ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους $2l$ κρατείται αρχικά κατακόρυφη πάνω σε τραχύ οριζόντιο επίπεδο δάπεδο και κατόπιν αφήνεται να περιστραφεί γύρω από το άκρο της που βρίσκεται σε επαφή με το δάπεδο.

(α) Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει ολίσθηση, βρείτε τη γωνιακή επιτάχυνση α και τη γωνιακή ταχύτητα ω της ράβδου ως συναρτήσεις της γωνίας θ που αυτή σχηματίζει με την κατακόρυφο. Υπενθυμίζεται ότι $\alpha = \ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$.

(β) Εξετάζοντας την κίνηση του κέντρου μάζας της ράβδου, βρείτε τις συνιστώσες (οριζόντια και κατακόρυφη) της δύναμης που ασκείται από το δάπεδο πάνω στη ράβδο και έτσι και την κάθετη αντίδραση N του δαπέδου πάνω στη ράβδο ως συνάρτηση της θ.

Υπόδειξη: Η κεντρομόλος επιτάχυνση του κέντρου μάζας προς το σημείο επαφής ράβδου και δαπέδου είναι $l\omega^2$, και η εγκάρσια συνιστώσα $l\alpha$.

Απ.: $(\alpha)\ \alpha = \dfrac{3g}{4l}\sin\theta,\quad \omega = \sqrt{\dfrac{3g}{2l}(1-\cos\theta)}$, $\quad (\beta)\ N = \dfrac{mg}{4}(1-3\cos\theta)^2$.

Ι. 38 Δύο κυκλικοί δίσκοι με μάζες M_1 και M_2 και ακτίνα R, περιστρέφονται γύρω από κοινό άξονα κάθετο στο επίπεδο των δίσκων και που περνά από τα κέντρα τους. Οι γωνιακές ταχύτητες των δίσκων είναι ω_1 και ω_2, και οι στροφορμές τους L_1 και L_2, αντίστοιχα. Οι δίσκοι έρχονται και παραμένουν σε επαφή. Τι θα συμβεί ως προς την κίνησή τους; Ποια είναι η τελική γωνιακή ταχύτητα των δύο δίσκων και ποια η τελική απώλεια ενέργειας ΔE;

Απ.: $\omega = \dfrac{\omega_1 M_1 + \omega_2 M_2}{M_1 + M_2}$ $\quad \Delta E = \dfrac{1}{4}\dfrac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} R^2 (\omega_2 - \omega_1)^2$.

Ι. 39 Μία λεπτή τετράγωνη πόρτα με μάζα M και πλευρά a μπορεί να περιστραφεί χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα AB που συμπίπτει με μια από τις πλευρές της. Αρχικά η πόρτα είναι ανοιχτή και σχηματίζει γωνία 90^0 με τον τοίχο. Μία σφαίρα μάζας m κινείται με ταχύτητα υ σε κατεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της πόρτας. Η σφαίρα σφηνώνεται στην πόρτα σε απόσταση a από τον άξονα.

(α) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα AB. Η ροπή αδράνειας της πόρτας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στο επίπεδό της είναι $I_0 = \frac{1}{6}Ma^2$.

(β) Σε πόσο χρόνο θα κλείσει η πόρτα από τη στιγμή που θα χτυπηθεί από τη σφαίρα;

(γ) Ποιο κλάσμα της ενέργειας της σφαίρας χάνεται όταν αυτή σφηνωθεί στην πόρτα;

Απ.: $(\alpha)\quad I = \left(\dfrac{1}{3}M + m\right)\alpha^2$, $\quad (\beta)\ t = \dfrac{\pi\alpha}{2\upsilon}\left(1 + \dfrac{M}{3m}\right)$, $\quad (\gamma)\ \dfrac{\Delta E}{E} = \dfrac{M}{M+3m}$.

Ι. 40 Δίνεται κυκλικός δίσκος ακτίνας R και μάζας M, ομοιόμορφα κατανεμημένης. Ο δίσκος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 περί άξονα που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η μάζα του δίσκου αρχίζει να αυξάνει γραμμικά με το χρόνο με ρυθμό $a = \mathrm{d}M/\mathrm{d}t$, π.χ. λόγω βροχής που πέφτει ομοιόμορφα και κάθετα στο επίπεδο του δίσκου με αμελητέα ταχύτητα. Η αύξηση της μάζας κατανέμεται ομοιόμορφα σε κάθε σημείο του δίσκου. Να διατυπωθεί και να λυθεί η εξίσωση κίνησης του δίσκου και να βρεθεί έτσι η γωνιακή του ταχύτητα $\omega(t)$.

Απ.: $(M_0 + \alpha t)\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \alpha\omega = 0 \quad \omega(t) = \dfrac{\omega_0 M_0}{M_0 + \alpha t}$.

Ι. 41 Δύο μάζες, m_1 και m_2 $(m_2 > m_1)$, είναι δεμένες αντίστοιχα στα δύο άκρα ενός μη εκτατού νήματος αμελητέας μάζας, το οποίο είναι περασμένο πάνω από μια τροχαλία. Η τροχαλία είναι κυκλικός δίσκος ακτίνας R και μάζας M, που μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο του δίσκου και είναι κάθετος στις επίπεδες επιφάνειές του. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας γύρω από τον άξονά της είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$. Αρχικά το σύστημα είναι ακίνητο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι μάζες αφήνονται ελεύθερες να κινηθούν. Καθώς η τροχαλία περιστρέφεται, το νήμα που εφάπτεται της τροχαλίας δεν γλιστρά ως προς αυτήν, τα δε ελεύθερα τμήματά του είναι κατακόρυφα. Μελετήστε την κίνηση του συστήματος: υποθέτοντας τάσεις T_1 και T_2 στα δύο τμήματα του νήματος, στα οποία είναι συνδεδεμένες οι μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα, και εξετάζοντας τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στις δύο μάζες και τις ροπές που ασκούνται πάνω στην τροχαλία, διατυπώστε τις εξισώσεις κίνησης των τριών αυτών σωμάτων. Λύστε τις εξισώσεις αυτές για να βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα ω της τροχαλίας, τη γωνία $\theta(t)$ κατά την οποία έχει περιστραφεί σε χρόνο t, καθώς επίσης και την ταχύτητα της μάζας m_1 και τη μετατόπισή της από την αρχική της θέση $y(t)$. Βρείτε επίσης τη δύναμη T_1 που ασκεί το νήμα πάνω στη μάζα m_1.

Απ.: Αν $\lambda \equiv \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + M/2}$, $\omega = \lambda \dfrac{g}{R} t$, $\theta = \dfrac{\lambda g}{2R} t^2$, $\upsilon_1 = \lambda g t$, $y_1 = \dfrac{\lambda}{2} g t^2$, $T_1 = (1+\lambda) m_1 g$.

Ι. 42 Ένας ομογενής κυκλικός δίσκος ακτίνας R και μάζας m, μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από ένα σημείο Ο της περιφέρειάς του και είναι κάθετος στις επίπεδες επιφάνειές του. Η ροπή αδράνειας του δίσκου γύρω από τον άξονα αυτόν είναι $I = \frac{3}{2}mR^2$. Μια σημειακή μάζα m είναι προσκολλημένη σε ένα σημείο Α της περιφέρειας του δίσκου, διαμετρικά αντίθετο του σημείου Ο. Αρχικά η σημειακή μάζα βρίσκεται κατακόρυφα πάνω από το σημείο Ο και το σύστημα είναι ακίνητο, όταν τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί.

(α) Δείξετε ότι, όταν ο δίσκος έχει περιστραφεί κατά γωνία θ, η γωνιακή του ταχύτητα $\dot{\theta}$ ικανοποιεί τη σχέση: $11R\dot{\theta}^2 = 12g(1-\cos\theta)$.

(β) Βρείτε την ακτινική συνιστώσα της δύναμης που ασκείται πάνω στη σημειακή μάζα, $m2R\dot{\theta}^2$ (προς το σημείο Ο), και την εγκάρσιά της συνιστώσα $m2R\ddot{\theta}$ (κάθετη στην ευθεία ΟΑ) όταν η γωνία περιστροφής είναι $\theta = \pi$. Λαμβάνοντας υπόψη το βάρος της σημειακής μάζας δείξετε ότι η δύναμη που ασκείται πάνω στη σημειακή μάζα από το δίσκο όταν $\theta = \pi$, είναι ίση με $\dfrac{59}{11}mg$ (προς τα πάνω).

Μηχανικές ταλαντώσεις. Συστήματα με ένα βαθμό ελευθερίας.

Ι. 43 Μάζα m, συνδεδεμένη στο άκρο ελατηρίου σταθεράς s, εκτελεί απλή αρμονική κίνηση χωρίς απώλειες. Η κίνηση της μάζας δίνεται από τη σχέση $x = A\sin\omega t$ για τιμές του χρόνου μέχρι και $t \leq \tau$. Για $t > \tau$, εφαρμόζεται στον ταλαντωτή σταθερή δύναμη F προς τα θετικά x $(F > 0)$. Τα A, s, ω, τ και F είναι γνωστά.

(α) Βρείτε την κίνηση του ταλαντωτή για $t > \tau$.

(β) Βρείτε το πλάτος των ταλαντώσεων για $t > \tau$.

Ι. 44 Σημειακή μάζα m είναι συνδεδεμένη στο ελεύθερο άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς $s = m\omega_0^2$. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ακίνητο σημείο. Η μάζα κινείται πάνω στον άξονα των x και υφίσταται δύναμη τριβής ίση με $-r\dot{x} = -m\gamma\dot{x}$. Εξωτερική δύναμη ίση με $F = F_0\cos\omega t$ ασκείται επίσης πάνω στη μάζα, στην κατεύθυνση x. Υποθέτοντας ότι $x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$, στη μόνιμη κατάσταση,

(α) Βρείτε τα A και B.

(β) Δείξετε ότι η μέση απορροφούμενη από τον ταλαντωτή ισχύς είναι $\overline{P} = \frac{1}{2}\omega F_0 A$. Γιατί η κίνηση με πλάτος το B δεν επηρεάζει την ισχύ;

(γ) Δείξετε ότι η μέση τιμή της ολικής ενέργειας του ταλαντωτή, για χρονικό διάστημα μιας περιόδου, είναι ίση με $\overline{E} = \frac{1}{4}m(\omega_0^2 + \omega^2)(A^2 + B^2)$.

Ι. 45 Ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής χωρίς απόσβεση, με μάζα m, έχει γωνιακή συχνότητα συντονισμού ίση με ω_0. Τη στιγμή $t = 0$, και όταν η μετατόπιση του ταλαντωτή είναι ίση με μηδέν και η ταχύτητά του ίση με υ, ασκείται στον ταλαντωτή δύναμη ίση με $F = F_0\cos\omega t$, στην κατεύθυνση της θετικής μετατόπισής του.

(α) Επαληθεύσετε ότι η μετατόπιση του ταλαντωτή για $t > 0$ δίνεται από τη σχέση $x(t) = \frac{F_0}{m}\frac{\cos\omega t - \cos\omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\upsilon}{\omega_0}\sin\omega_0 t$.

(β) Υποθέτοντας ότι $\omega = \omega_0 + \delta\omega$, βρείτε τη μορφή της λύσης καθώς $\delta\omega \to 0$ και επιτυγχάνεται συντονισμός. Δείξετε ότι το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να βρεθεί εφαρμόζοντας τον κανόνα του L' Hospital στον πρώτο όρο της λύσης, θεωρώντας την ω ως μια μεταβλητή της οποίας η τιμή τείνει στην ω_0. Απ.: $x(t) = \left(\frac{\upsilon}{\omega_0} + \frac{F_0}{2m\omega_0}t\right)\sin\omega_0 t$.

Ι. 46 Δύο ίσες μάζες m (Α και Β) βρίσκονται στα άκρα ενός ελατηρίου του οποίου η σταθερά είναι s. Οι μάζες είναι αρχικά ακίνητες πάνω σε οριζόντια επιφάνεια και απέχουν η μία από την άλλη απόσταση ίση με το φυσικό μήκος του ελατηρίου. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκείται πάνω στη μάζα Β δύναμη ίση με $F = F_0\cos\omega t$, κατά μήκος της ευθείας που ενώνει τις δύο μάζες, με θετική κατεύθυνση την ΑΒ.

(α) Συμβολίζοντας τις μετατοπίσεις των δύο μαζών από τις αρχικές τους θέσεις με x_A και x_B, διατυπώστε τις εξισώσεις κίνησής τους.

(β) Ορίστε κανονικές συντεταγμένες για το σύστημα και λύστε τις διαφορικές εξισώσεις που αυτές ικανοποιούν. Επαληθεύσετε ότι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\ddot{x} + \alpha^2 x = \beta\cos\omega t$ είναι η $x(t) = A\cos\alpha t + B\sin\alpha t + \frac{\beta}{\alpha^2 - \omega^2}\cos\omega t$ και χρησιμοποιήστε την για να βρείτε τα $x_A(t)$ και $x_B(t)$. (Προσοχή! Η λύση της διαφορικής εξίσωσης $\ddot{x} = \beta \cos\omega t$ να βρεθεί ξεχωριστά, με ολοκλήρωση, για να αποφευχθούν λάθη).

Μηχανικές ταλαντώσεις. Συστήματα με πολλούς βαθμούς ελευθερίας.

Ι. 47 Τρία ελατήρια, ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ, είναι συνδεδεμένα έτσι ώστε να βρίσκονται σε μια ευθεία, τα σημεία Α και Δ να είναι ακίνητα και σε καθένα από τα σημεία Β και Γ να είναι συνδεδεμένη μια σημειακή μάζα m. Όταν το σύστημα ισορροπεί, τα ελατήρια έχουν τα φυσικά τους μήκη. Οι σταθερές των ελατηρίων ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ είναι $2s$, s και $2s$ αντίστοιχα.

(α) Διατυπώστε τις εξισώσεις κίνησης των δύο μαζών για διαμήκεις ταλαντώσεις μικρού πλάτους κατά μήκος της ευθείας ΑΔ. Συμβολίστε με $x(t)$ και $y(t)$ τις μετατοπίσεις των μαζών στα Β και Γ αντίστοιχα, από τις θέσεις ισορροπίας των.

(β) Βρείτε δύο κανονικές συντεταγμένες του συστήματος και τις κανονικές συχνότητες που αντιστοιχούν σε αυτές.

(γ) Λύσετε τις διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν για τις κανονικές συντεταγμένες, για να βρείτε τα $x(t)$ και $y(t)$.

(δ) Βρείτε την κινητική ενέργεια, $E_K(t)$, και τη δυναμική ενέργεια του συστήματος, $E_\Delta(t)$. Βρείτε την ολική ενέργεια E του συστήματος και δείξετε ότι αποτελείται από δύο σταθερούς όρους, ανεξάρτητους μεταξύ τους, οι οποίοι αντιστοιχούν στους δύο κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.

Ι. 48 Τρεις σημειακές μάζες, m, $2m$ και $3m$, βρίσκονται αντίστοιχα στα σημεία Α, Β και Γ της ευθείας ΑΒΓ. Οι μάζες συνδέονται μεταξύ τους με δύο πανομοιότυπα ελατήρια σταθεράς s. Όταν οι μάζες βρίσκονται στα σημεία ισορροπίας τους Α, Β και Γ, τα ελατήρια έχουν τα φυσικά τους μήκη. Συμβολίστε με x_A, x_B και x_Γ τις μετατοπίσεις των τριών μαζών αντίστοιχα κατά μήκος της ευθείας ΑΒΓ και προς την κατεύθυνση που θεωρείται θετική.

(α) Διατυπώστε τις εξισώσεις κίνησης των τριών μαζών.

(β) Υποθέστε ότι στο σύστημα έχει διεγερθεί μόνο ένας κανονικός τρόπος ταλάντωσης, και επομένως ότι οι κινήσεις των μαζών δίνονται από τις εξισώσεις:

$$x_A = A_A \sin(\omega t + \phi), \quad x_B = A_B \sin(\omega t + \phi), \quad x_\Gamma = A_\Gamma \sin(\omega t + \phi).$$

Αντικαταστήστε στις εξισώσεις κίνησης και βρείτε την εξίσωση για τις κανονικές συχνότητες του συστήματος. Λύστε την εξίσωση για να βρείτε τις κανονικές συχνότητες ω_1 και ω_2 του συστήματος.

(γ) Από τις σχέσεις που βρέθηκαν στο (β), βρείτε επίσης τους λόγους των πλατών A_{B1}/A_{A1}, $A_{\Gamma 1}/A_{A1}$ και A_{B2}/A_{A2}, $A_{\Gamma 2}/A_{A2}$ αντίστοιχα για τις δύο κανονικές συχνότητες ω_1 και ω_2 που βρέθηκαν. Αν η κίνηση της μάζας m δίνεται από τη σχέση $x_A = A_{A1}\sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_{A2}\sin(\omega_2 t + \phi_2)$, δείξετε ότι οι κινήσεις των δύο άλλων μαζών δίνονται από τις εξισώσεις:

$$x_B = \frac{\sqrt{13}-1}{6} A_{A1}\sin(\omega_1 t + \phi_1) - \frac{\sqrt{13}+1}{6} A_{A2}\sin(\omega_2 t + \phi_2),$$

$$x_\Gamma = -\frac{\sqrt{13}+2}{9} A_{A1}\sin(\omega_1 t + \phi_1) + \frac{\sqrt{13}-2}{9} A_{A2}\sin(\omega_2 t + \phi_2).$$

Ι. 49 Αβαρές νήμα μήκους 3α έχει τα άκρα του ακίνητα και είναι τεντωμένο με τάση T. Μία σημειακή μάζα m είναι στερεωμένη στο νήμα σε απόσταση α από το αριστερό άκρο του νήματος, και μια άλλη, $2m$, σε απόσταση α από το δεξιό άκρο του νήματος. Οι δύο μάζες εκτελούν εγκάρσιες ταλαντώσεις μικρού πλάτους, κατά τις οποίες τα τρία τμήματα του νήματος παραμένουν ευθύγραμμα και στο ίδιο επίπεδο, η βαρύτητα δεν παίζει κανένα ρόλο και η τάση στο νήμα παραμένει σταθερή και ίση με T. Συμβολίστε με $x(t)$ και $y(t)$ τις εγκάρσιες μετατοπίσεις των μαζών m και $2m$ αντίστοιχα.

(α) Διατυπώστε τις εξισώσεις κίνησης των δύο μαζών συναρτήσει των γωνιών που σχηματίζουν τα τρία τμήματα του νήματος με την ευθεία πάνω στην οποία οι μάζες ισορροπούν.

(β) Χρησιμοποιώντας για μικρά $x(t)$ και $y(t)$ την προσέγγιση $\sin\theta \cong \tan\theta$, δείξετε ότι οι εξισώσεις κίνησης είναι $\ddot{x} = \omega_0^2(y-2x)$ και $2\ddot{y} = \omega_0^2(x-2y)$, όπου $\omega_0^2 = T/m\alpha$.

(γ) Υποθέστε ότι στο σύστημα έχει διεγερθεί μόνο ένας κανονικός τρόπος ταλάντωσης, και επομένως ότι οι κινήσεις των μαζών δίνονται από τις εξισώσεις: $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ και $y(t) = B\sin(\omega t + \phi)$. Αντικαταστήστε στις εξισώσεις κίνησης και βρείτε την εξίσωση για τις κανονικές συχνότητες του συστήματος. Λύστε την εξίσωση για να βρείτε τις κανονικές συχνότητες ω_1 και ω_2 και τους αντίστοιχους λόγους των πλατών των ταλαντώσεων των δύο μαζών, B_1/A_1 και B_2/A_2.

Κύματα. Ταλαντώσεις σε χορδή.

Ι. 50 Σε μια τεντωμένη χορδή μήκους L, η οποία έχει ακίνητα τα δύο της άκρα στα σημεία $x=0$ και $x=L$, έχουν διεγερθεί δύο μόνο κανονικοί τρόποι ταλάντωσης (ο 1ος και ο 3ος), έτσι ώστε η εγκάρσια μετατόπιση να δίνεται από τη σχέση:

$$y(x,t) = \alpha_1 \sin\left(\pi \frac{c}{L} t + \phi_1\right)\sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) + \alpha_3 \sin\left(3\pi \frac{c}{L} t + \phi_3\right)\sin\left(3\frac{\pi}{L} x\right)$$

όπου α_1, α_3, ϕ_1 και ϕ_3 είναι σταθερές.

(α) Βρείτε την κινητική και τη δυναμική ενέργεια της χορδής.

(β) Βρείτε την ολική ενέργεια της χορδής και δείξετε ότι αποτελείται από δύο ανεξάρτητους σταθερούς όρους, που αντιστοιχούν στους δύο κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.

Ι. 51 Χορδή τεντωμένη με δύναμη T έχει ακίνητο το άκρο της στο σημείο $x=L$, ενώ το άλλο της άκρο, στο σημείο $x=0$ εξαναγκάζεται να ταλαντώνεται εγκαρσίως σύμφωνα με τη σχέση $y(0,t) = A\sin\omega t$. Στη μόνιμη κατάσταση, η εγκάρσια μετατόπιση της χορδής δίνεται από τη γενική λύση:

$$y(x,t) = \alpha\cos\left(\frac{\omega x}{c} + \theta\right)\sin(\omega t + \phi)$$

(α) Χρησιμοποιήστε τις οριακές συνθήκες για να προσδιορίσετε το α και τις σταθερές φάσης θ και ϕ, και να βρείτε έτσι την κίνηση που εκτελεί η χορδή.

(β) Σχεδιάστε το μέγιστο πλάτος των στάσιμων κυμάτων, α, συναρτήσει της διεγείρουσας συχνότητας ω. Σχολιάστε.

Ι. 52 Η γενική λύση για την εγκάρσια κίνηση μιας χορδής με ακίνητα τα άκρα της που βρίσκονται στα σημεία $x=0$ και $x=L$, και η οποία είναι αρχικά ακίνητη, είναι:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(n\frac{\pi c}{L}t\right).$$

Σε μια τέτοια χορδή η αρχική εγκάρσια μετατόπιση αυξάνει γραμμικά από το 0 μέχρι την τιμή α μεταξύ των σημείων $x = 0$ και $x = L/2$, και μειώνεται γραμμικά από την τιμή α στο 0 μεταξύ των σημείων $x = L/2$ και $x = L$, δηλαδή:

$$y(x,0) = \frac{2\alpha x}{L} \quad \text{για} \quad 0 \le x \le \frac{L}{2}, \qquad \text{και} \qquad y(x,0) = \frac{2\alpha(L-x)}{L} \quad \text{για} \quad \frac{L}{2} \le x \le L$$

Με τη μέθοδο της ανάλυσης Fourier βρίσκεται ότι η αρχική μετατόπιση δίνεται επίσης, για x μεταξύ $x = 0$ και $x = L$, και από τη σειρά:

$$y(x,0) = \frac{8\alpha}{\pi^2}\left\{\sin\left(\pi\frac{x}{L}\right) - \frac{1}{3^2}\sin\left(3\pi\frac{x}{L}\right) + \frac{1}{5^2}\sin\left(5\pi\frac{x}{L}\right) - \frac{1}{7^2}\sin\left(7\pi\frac{x}{L}\right) + \ldots\right\}$$

(α) Προσδιορίστε τους συντελεστές A_n και έτσι βρείτε την κίνηση της χορδής για $t \ge 0$.

(β) Βρείτε τη σωματιδιακή ταχύτητα $\upsilon(x,t) = \dfrac{\partial y}{\partial t}$ στη χορδή. Πότε μηδενίζεται αυτή σε κάθε σημείο της χορδής;

(γ) Σχεδιάστε πρόχειρα το σχήμα της χορδής στις χρονικές στιγμές $t = 0$, $\dfrac{T_1}{4}$ και $\dfrac{T_1}{2}$, όπου $T_1 = \dfrac{c}{2L}$.

Ι. 53 Χορδή είναι τεντωμένη με τάση T και αποτελείται από δύο τμήματα: το τμήμα $x < 0$ στο οποίο η γραμμική πυκνότητα της χορδής είναι τέτοια ώστε η ταχύτητα των εγκαρσίων κυμάτων να είναι ίση με c_1, και το τμήμα $x > 0$ στο οποίο η ταχύτητα των εγκαρσίων κυμάτων είναι ίση με c_2. Στη χορδή κινείται προς τα δεξιά το κύμα $y_i = A\sin(\omega t - k_1 x)$ το οποίο προσπίπτει από τα αριστερά στο σημείο $x = 0$. Υποθέστε ότι παρατηρείται μερική ανάκλαση του κύματος, και ότι στη χορδή υπάρχουν, εκτός από το προσπίπτον κύμα,

και το ανακλώμενο κύμα, (που κινείται προς τα αριστερά):

$$y_r = B\sin(\omega t + k_1 x) + C\cos(\omega t + k_1 x), \qquad x \le 0, \quad k_1 = \frac{\omega}{c_1}$$

καθώς και το μεταδιδόμενο κύμα, (που κινείται προς τα δεξιά):

$$y_t = D\sin(\omega t - k_2 x) + E\cos(\omega t - k_2 x), \qquad x \ge 0, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2}$$

όπου B, C, D και E είναι σταθερές. Η εγκάρσια μετατόπιση στο τμήμα $x < 0$ της χορδής είναι, επομένως, $y_1 = y_i + y_r$, και στο τμήμα $x > 0$ είναι $y_2 = y_t$.

Χρησιμοποιήστε τις οριακές συνθήκες στο σημείο $x = 0$ για να βρείτε:

τον (συντελεστή ανάκλασης πλάτους) = (πλάτος ανακλώμενου κύματος) / A, και

τον (συντελεστή μετάδοσης πλάτους) = (πλάτος μεταδιδόμενου κύματος) / A.

Εκφράστε τα αποτελέσματά σας συναρτήσει των χαρακτηριστικών αντιστάσεων

$$Z_1 = \rho_1 c_1 = T/c_1 = k_1 T/\omega \qquad \text{και} \qquad Z_2 = \rho_2 c_2 = T/c_2 = k_2 T/\omega$$

των δύο τμημάτων της χορδής.

(Υπόδειξη: οι οριακές συνθήκες στο σημείο $x = 0$ είναι:

(i) συνέχεια της εγκάρσιας μετατόπισης, $y_1(0,t) = y_2(0,t)$

(ii) συνέχεια της μεταδιδόμενης εγκάρσιας δύναμης, $\left.\dfrac{\partial y_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{\partial y_2}{\partial x}\right|_{x=0}$ για κάθε t).

Ι. 54 Σε χορδή τεντωμένη με τάση T διαδίδεται το εγκάρσιο κύμα $y(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$. Σε κάθε σημείο της χορδής, η χορδή που βρίσκεται στα αριστερά του σημείου ασκεί εγκάρσια δύναμη $F_y = -T\frac{\partial y}{\partial x}$ πάνω στη χορδή που βρίσκεται στα δεξιά του σημείου (μεταδιδόμενη εγκάρσια δύναμη).

(α) Υπολογίστε τη σωματιδιακή ταχύτητα $\frac{\partial y}{\partial t}$ και τη μεταδιδόμενη εγκάρσια δύναμη F_y σε κάθε σημείο της χορδής.

(β) Βρείτε το ρυθμό παραγωγής έργου, $P(t)$, από τη μεταδιδόμενη εγκάρσια δύναμη σε κάποιο σημείο της χορδής.

(γ) Δείξετε ότι η μέση τιμή του $P(t)$ ως προς το χρόνο, ισούται με το ρυθμό μεταφοράς ενέργειας κατά μήκος της χορδής, δηλαδή με το γινόμενο της πυκνότητας ενέργειας ανά μονάδα μήκους της χορδής, $\frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$, επί την ταχύτητα διάδοσης του κύματος c.

Ι. 55 Μια χορδή έχει μήκος L, ολική μάζα m, βρίσκεται υπό τάση T και εκτελεί εγκάρσιες ταλαντώσεις μικρού πλάτους. Το ένα άκρο της χορδής, στο σημείο $x = 0$, είναι ακίνητο, ενώ στο άλλο της άκρο, στο σημείο $x = L$, η χορδή είναι συνδεδεμένη με σημειακή μάζα M η οποία μπορεί να κινείται μόνο εγκαρσίως, χωρίς τριβή. Υποθέστε λύσεις της μορφής $y(x,t) = A\sin(kx+\theta)\sin(\omega t+\phi)$ για τη μετατόπιση της χορδής και, χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες στα δύο άκρα της χορδής, δείξετε ότι οι κανονικές συχνότητες της χορδής δίνονται από τις λύσεις της υπερβατικής εξίσωσης $\left(\frac{\omega L}{c}\right)\tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \frac{m}{M}$.

(Υπόδειξη: Οι οριακές συνθήκες στο άκρο $x = L$ είναι οι εξής: η μετατόπιση, η ταχύτητα και επομένως και η επιτάχυνση της μάζας M είναι ίδιες με τα αντίστοιχα μεγέθη του σημείου $x = L$ της χορδής, η δε κίνηση της μάζας M καθορίζεται από την εγκάρσια δύναμη που ασκεί σε αυτήν η χορδή, δηλαδή την $F_y(L,t) = -T\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=L}$, που είναι και η μόνη δύναμη την οποία υφίσταται).